EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**047**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care dreptele

$d_1 : x + y - 1 = 0$ şi $d_2 : 2x + ay + 3 = 0$ sunt paralele.

(4p) **b)** Să se determine numărul diagonalelor unui poligon convex cu 5 laturi .

(4p) **c)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = i + i^2 + i^3 + ... + i^7$.

(4p) **d)** Să se calculeze raza cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 2x = 3$.

(2p) **e)** Să se calculeze suma $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}$.

(2p) **f)** Să se calculeze aria unui pătrat care are perimetrul egal cu 8.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ şi se notează cu a, b rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

(3p) **a)** Să se determine valoarea minimă a funcției f.

(3p) **b)** Să se calculeze valoarea sumei $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

(3p) **c)** Să se determine numerele reale y pentru care $f(3^y) = 0$.

(3p) **d)** Să se rezolve ecuația $f(\log_2 t) = 0$, $t \in (0, \infty)$.

(3p) **e)** Să se calculeze determinatul $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{vmatrix}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se rezolve inecuația $f(x) \le \frac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 \cdot f(n)\right)^{2n}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X + 2$.

(4p) **a)** Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale .

(4p) **b)** Să se arate că polinomul f are o singură rădăcină reală.

Notăm cu $a \in \mathbf{R}$ unica rădăcină reală a polinomului f şi cu $\mathbf{Q}(a) = \{ g(a) \mid g \in \mathbf{Q}[X] \}$.

(4p) **c)** Să se verifice că $0 \in \mathbf{Q}(a)$ şi $1 \in \mathbf{Q}(a)$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}(a)$, atunci $\alpha + \beta \in \mathbf{Q}(a)$ şi $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{Q}(a)$.

(2p) **e)** Să se arate că $\mathbf{Q}(a) = \{ p + qa + ra^2 \mid p, q, r \in \mathbf{Q} \}$.

(2p) **f)** Să se arate că, dacă $p, q, r \in \mathbf{Q}$ şi $p + qa + ra^2 = 0$, atunci $p = q = r = 0$.

(2p) **g)** Să se arate că $a^{2006} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + f_n(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $f_2(x) \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $1 + \int_0^x f_n(t)dt = f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_{2n}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că funcția f_{2007} este bijectivă .

(2p) **g)** Să se arate că funcția f_{2006} este convexă pe $\mathbf{R}$.